



ACTIVIDAD 7

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Nombre: _____ Curso: 4°medio __ Fechas: __/__/2020

Objetivos a Evaluar:

- Reconocer e Identificar una Progresión Geométrica

INSTRUCTIVO:

DEBES LEER ATENTAMENTE TODA LA GUÍA, COMPLETAR Y RESOLVER CADA UNA DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS PARA DOS SEMANAS DE TRABAJO

EN CASO DE TENER PREGUNTAS CON RESPECTO A LA GUÍA 4, PUEDES COMUNICARTE CON LA PROFESORA **Mónica González** ENVIANDO UN CORREO A cuartoaln2020@gmail.com LOS LUNES DESDE LAS 16:00 HRS HASTA LAS 18:00. HRS.

EN EL CORREO ANTES MENCIONADO DEBES ENVIAR TUS RESPUESTAS Y/O SOLUCIONES DE ESTA GUIA. LA FECHA DE **RECEPCION** SERÁ EL DÍA 15 DE JUNIO DEL 2020, **SOLO LAS RESPUESTAS EN WORD O FOTO**, INDICANDO CURSO, NOMBRE Y NÚMERO DE ACTIVIDAD.

RECUERDA LO MAS IMPORTANTE, ES QUE ESTE TRABAJO ES INDIVIDUAL, RESPETANDO EL PROCESO QUE ESTAMOS VIVIENDO, PERO ESO NO IMPIDE QUE PUEDES APOYARTE O CONSULTAR CON TUS COMPAÑERAS A TRAVÉS DE REDES SOCIALES.

IMPORTANTE: RECUERDA QUE ESTE MATERIAL ES UN CONTINUO DE LOS ANTERIORES, ASÍ QUE RECUERDA TENERLO A MANO PARA RESOLVER ESTA ACTIVIDAD.

ACTIVIDAD 7: IV MEDIO DIFERENCIADO.

Propuesta: Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de India un rey llamado Sheram. En una de las batallas que participó su ejército, su hijo murió y ese acontecimiento lo dejó profundamente consternado, nada que le ofrecieran podía alegrar su vida. Un día llegó ante el rey Sissa, un hombre del pueblo. Sissa le mostró al rey el **ajedrez**. Después de enseñarle las reglas y cómo jugar, la tristeza del rey desapareció en gran manera. El rey estaba tan agradecido que le ofreció a Sissa una recompensa por aliviar su dolor. Sissa pidió lo siguiente: **“Deseo que ponga un grano de trigo en el primer cuadro del tablero, dos en el segundo, cuatro en el tercero, y así sucesivamente, doblando el número de granos en cada cuadro y que me entregue la cantidad de granos de trigo resultante”**. Al rey le asombró al notar lo poco que pidió Sissa e hizo que lo cumplieran.



Su verdadera sorpresa llegó cuando los matemáticos de la corte le advirtieron que no podían cumplir su petición, pues nadie en el universo contaba con tal cantidad de trigo.

¿Qué fue lo que pidió Sissa verdaderamente?

Observemos detenidamente lo que pidió Sissa:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{62} + 2^{63}$$

Lo pedido por Sissa corresponde a la suma de los primeros términos de una sucesión. ¿Crees tú que la sucesión descrita corresponde a una Progresión Aritmética? ¿Puedes encontrar la constante d ? Justifica tu respuesta

Para dar sentido a la sucesión anterior es necesario que definir un nuevo concepto, **Progresión Geométrica**.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Se define una Progresión Geométrica (P.G) como una sucesión en la que cada término, excepto el primero, se multiplica por una constante numérica o cantidad fija que llamamos razón r .

En la propuesta anterior tenemos lo siguiente:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...
x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2

Podemos observar que cada término está multiplicado por 2, por lo tanto es una P.G con $r = 2$

Generalizando, podemos observar que cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el término anterior por la razón, es decir:

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_3 = a_2 \cdot r$$

$$a_4 = a_3 \cdot r$$

⋮

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

Por lo tanto, cualquier término de la sucesión lo podemos encontrar de la siguiente manera:

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

Si quisiéramos conocer el valor de la razón, de las igualdades anteriores podemos despejar r y obtenemos lo siguiente:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

En el ejemplo de la propuesta se cumple siempre, pues:

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = \frac{128}{64} = \dots = 2$$

En el caso de que no conozcamos la P.G completa, pero si la posición de los términos, de igual modo es posible encontrar cualquier término, por ejemplo:

Si en la propuesta, sólo conociéramos que $a_2 = 2$, $r = 2$ y se nos pide calcular a_5 . Tenemos que:

$$\dots, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$$

Pero, utilizando la fórmula general, cada término lo podemos reescribir de la siguiente forma:

$$a_2 \rightarrow \text{término conocido}$$

$$a_3 \rightarrow a_2 \cdot r$$

$$a_4 \rightarrow a_3 \cdot r \rightarrow a_2 \cdot r \cdot r = a_2 \cdot r^2$$

$$a_5 \rightarrow a_4 \cdot r \rightarrow a_3 \cdot r \cdot r \rightarrow a_2 \cdot r^2 \cdot r = a_2 \cdot r^3$$

Es decir,

$$a_5 = 2 \cdot 2^3 = 2 \cdot 8 = 16$$

Formalizando lo anterior, cada vez que calculemos un término cualquiera de la sucesión, no conociendo la P.G. completa podemos aplicar la siguiente fórmula:

$$a_q = a_p \cdot r^{q-p}; q > p$$

Si retomamos la propuesta inicial, lo que pidió Sissa fue la suma de los 64 términos de la P.G. es decir,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Como necesitamos que aparezca la razón, nuestro siguiente paso es calcular una nueva suma, donde multipliquemos la razón, de la siguiente forma:

$$S_n \cdot r = \underbrace{a_1 \cdot r} + \underbrace{a_2 \cdot r} + \underbrace{a_3 \cdot r} + \dots + \underbrace{a_{n-1} \cdot r} + \underbrace{a_n \cdot r}$$

$$S_n \cdot r = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot r$$

Restamos ambas sumas de la siguiente manera

-	$S_n =$	$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$
	$S_n \cdot r =$	$a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot r$

Como resultado tenemos lo siguiente:

$$S_n - S_n \cdot r = a_1 - a_n \cdot r$$

Factorizamos y despejamos

$$S_n(1 - r) = a_1 - a_n \cdot r$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

Reescribimos $a_n = a_1 \cdot r^n$, entonces:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot r^n}{1 - r}$$

Factorizamos nuevamente y obtenemos la fórmula para la suma de los términos

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

Retomando la propuesta, calculemos los granos de trigo pedidos por Sissa:

$$S_{64} = \frac{1(1 - 2^{64})}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{64}}{-1}$$

El cálculo preciso no es posible obtenerlo desde una calculadora científica, para mayor precisión utilizaremos *WolframAlpha*

$$S_{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Con esto, Sissa quiso dar una lección al rey, pues algunas veces la riqueza material no es suficiente.

EN RESUMEN

- La regla de formación para una P.G es: $a_n = a_{n-1} \cdot r$
- Encontrar un término cualquiera en la PG es: $a_q = a_p \cdot r^{q-p}; q > p$
- Encontrar la suma de los términos de una P.G es: $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

PRACTIQUEMOS.

- 1) En una P.G $a_1 = 3$, $r = 2$ ¿Cuál es el sexto término?
- 2) En una P.G $a_1 = 5$, $a_7 = 320$ ¿Cuál es el valor de la razón?
- 3) En una P.G $a_1 = 4$, $r = 3$ ¿Cuál es el quinto término?
- 4) Considere una P.G que se forma por $a_1 = 1$, $r = \frac{1}{2}$. Realice lo siguiente:
 - Escriba los primeros 5 términos de la sucesión.

- Calcule la suma de los primeros 5 términos de la sucesión.

Antes de finalizar nuestra actividad te invito a responder las siguientes preguntas:

- a) ¿Qué te resultó más fácil, ¿por qué?
- b) ¿Qué te resultó más complejo, ¿por qué?
- c) ¿Cree que hay un método más fácil de resolver estos problemas?

CORREO PARA ENVIO DE ACTIVIDAD:

cuartoaln2020@gmail.com

Si deseas recurrir a tu texto te recomiendo usar este

link www.mineduc.cl

